PITAGORAS ACADEMIA

AMANECIDA DE MATEMÁTICA

SOLUCIONARIO DE TRIGONOMETRÍA

01.

Sean a, b, c los lados del triángulo; siendo a y b los catetos, $a > b$ y $c^2 = a^2 + b^2$. Por hipótesis $a = 2(c - b)$. Se pide $x = \tan B = \frac{b}{a}$.

Reemplazando $c = \frac{a}{2} + b$ en $c^2 = a^2 + b^2$,

$$\left(\frac{a}{2} + b\right) = a^2 + b^2,$$

y dividiendo por a^2

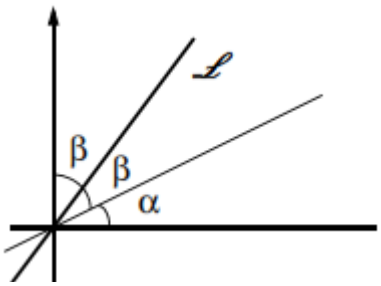
$$\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 = 1 + x^2.$$

Desarrollando, obtenemos

$$x = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

RESPUESTA: B

02.



La recta $3y - 4x - 12 = 0$ tiene pendiente $\tan\alpha = \frac{4}{3}$. Si $\mathscr{L}$ es la recta mencionada, su pendiente es $\tan(\alpha + \beta)$, donde $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$.

De la condición

$\tan(2\beta) = \cot(\alpha) = \frac{3}{4}$, esto es

$$\frac{2\tan(\beta)}{1 - \tan^2(\beta)} = \frac{3}{4},$$

de donde

$$3(\tan(\beta))^2 + 8\tan(\beta) - 3 = 0$$

y luego $\tan(\beta) = \frac{1}{3}$ (descartamos la otra solución por ser negativa).

Por tanto

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = 3.$$

RESPUESTA: D

03.

La recta que pasa por los puntos $M = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $Y = (0, 1)$ tiene pendiente, sobre cualquiera de sus puntos (x, y), igual a

$$\frac{y - 1}{x - 0} = \frac{\operatorname{sen}\theta - 1}{\cos\theta - 0}.$$

Esta recta interseca el eje X en el punto donde $y = 0$, lo que corresponde a

$$-\frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen}\theta - 1}{\cos\theta}$$

o $x = \dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} < 0$. El área de la región sombreada es entonces

$$\frac{|x|\cdot 2}{2} = |x| = -x = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta - 1}.$$

RESPUESTA: B

04.

De las identidades

$$2\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y),$$

$$2\cos(x)\operatorname{sen}(y) = \operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y),$$

tenemos que

$$\operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen}(2y) = \operatorname{sen}^2(x+y) - \operatorname{sen}^2(x\,.\,y).$$

Luego

$$E = 16\operatorname{sen}(54°)\operatorname{sen}(30°)\operatorname{sen}(18°)$$

$$= 8\operatorname{sen}(54°)\operatorname{sen}(18°)$$

$$= 4\operatorname{sen}(54°)\frac{2\operatorname{sen}(18°)\cos(18°)}{\cos(18°)}$$

$$= 4\cos(36°)\frac{\operatorname{sen}(36°)}{\cos(18°)}$$

$$= 2\frac{\operatorname{sen}(72°)}{\cos(18°)} = 2.$$

RESPUESTA: C

05.

i) Verdadero: de la desigualdad $-1 \le \cos(2x) \le 1$, tenemos que
$5 = -4+9 \le -4\cos(2x)+9 \le 4+9 = 13$,
tomando f(x) todos los valores en el intervalo [5, 13].

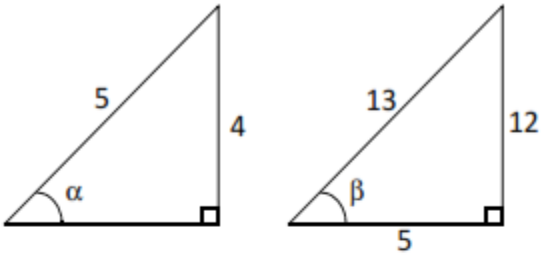
ii) Verdadero: de $-1 \le \cos(x) \le 1$, tenemos que $0 \le \cos^2(x) \le 1$ y
$-2 = 4\cdot 0 - 2 \le 4\cdot\cos^2(x) - 2 \le 4\cdot 1 - 2 = 2$,
tomando f(x) todos los valores en el intervalo [–2, 2].

iii) Verdadero: para todo x
$f(x+\pi) = |\operatorname{sen}(x+\pi)| = |\cos(x+\pi/2)| = |-\operatorname{sen}(x)| = f(x)$.

RESPUESTA: E

06.

Sean
$\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)$, $\beta = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{12}{13}\right)$



Entonces, de los triángulos

$$\tan(\alpha) = \frac{4}{3},\quad \tan(\beta) = \frac{5}{12}.$$

Del mismo modo, si
$\gamma = \operatorname{arc\,cot}(7)$, $\delta = \operatorname{arc\,cot}(3)$,

entonces

$$\tan(\gamma) = \frac{1}{7},\quad \tan(\delta) = \frac{1}{3}.$$

Luego

$$E = \frac{\cot(\alpha+\beta)}{\tan(\gamma+\delta)} = \frac{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}{\tan(\alpha)+\tan(\beta)} \cdot \frac{\tan(\gamma)+\tan(\delta)}{1-\tan(\gamma)\cdot\tan(\delta)}$$

$$= \frac{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12}}{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}} \cdot \frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{16}{63}\cdot\frac{1}{2} = \frac{32}{63}.$$

RESPUESTA: C

07.

Sea $u = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; entonces u toma los valores en $[-1, 1]$. Vemos que

$$f(x) = \left|\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\right|$$

$$= \left|\sqrt{2}u + 2\right|.$$

De $-1 \le u \le 1$, tenemos

$$-\sqrt{2} + 2 \le \sqrt{2}u + 2 \le \sqrt{2} + 2,$$

de donde

$$2 - \sqrt{2} \le \left|\sqrt{2}u + 2\right| \le 2 + \sqrt{2}.$$

Por tanto

$$m(f) = 2 - \sqrt{2},\ M(f) = 2 + \sqrt{2},\ y$$

$$M(f) - m(f) = 2\sqrt{2}.$$

RESPUESTA: C

08. Tenemos que:

$$\arctan(-x) = -\arctan(x),$$

$$\operatorname{arc\,cot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

de donde la desigualdad equivale a

$$\arctan(-x) > \operatorname{arcsen}(x),$$

donde $-1 \le x \le 1$. Evaluando la función seno a ambos lados de la desigualdad (y siendo creciente)

$$-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > x.$$

Esto es imposible para $x \ge 0$ por los signos, mientras que para $x < 0$ es siempre cierto. Como además $x \ge -1$, resulta $-1 \le x < 0$.

RESPUESTA: B

09.

Reescribiendo

$$9(x^2 + 2x) + 16(y^2 + 2y) = 119,$$

y completando cuadrados

$$9(x+1)^2 + 16(y+1)^2$$

$$= 119 + 9 + 16 = 144,$$

lo que nos deja la ecuación de una elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1.$$

Los vértices de esta elipse son (x, y) con

$$x = -1 \pm 4,\ y = 1.$$

La suma de las abscisas es

$$(-1 + 4) + (-1 - 4) = -2.$$

RESPUESTA: C

10.

Repitiendo la ley de cosenos en el triángulo ABC,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos A,$$

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 \cdot 2 \cdot BC \cdot AB \cos B,$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cos C.$$

Sumando y simplificando, obtenemos

$$AB \cdot AC \cdot \cos A + BC \cdot AB \cdot \cos B + AC \cdot BC \cdot \cos C = \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{2}$$

Reemplazando $AB = 4$, $AC = 3$, $BC = 2$,

$$12\cos A + 8\cos B + 6\cos C =$$

$$\frac{4^2 + 2^2 + 3^2}{2} = \frac{29}{2} = 14{,}5.$$

RESPUESTA: D